Jocs d'estratègia i el currículum escolar

Guido Ramellini

Resum

L'enfocament competencial de l'ensenyament de les matemàtiques obre un nou espai per a la utilització didàctica dels jocs d'estratègia, que poden contribuir al desenvolupament de les quatre dimensions indicades en els documents del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya: Resolució de problemes, Raonament i Prova, Connexions i Comunicació, i Representació.
Els jocs d'estratègia responen també al repte de treballar materials que estiguin a l'abast de tota mena d'alumnat i de permetre que cadascú pugui construir-se un recorregut d'aprenentatge coherent amb els seus interessos i la seva capacitat.
Partint de tres exemples (Torres d'Hanoi, Granotes i Gripaus i Joc de les Fitxes), l'article analitza també les matemàtiques que estan amagades a sota d'un apropament lúdic i aparentment senzill.
Pensem que és interessant donar a professorat i alumnat ocasions per a profunditzar autònomament els continguts i descobrir el plaer de la investigació.

Abstract

The competence approach to teaching mathematics opens up a new space for the educational use of strategy games. They can contribute to the development of the four dimensions mentioned in documents from the Department of Education of the Generalitat de Catalunya: Problem Solving, Reasoning and Proof, Connections and Communication, and Representation.
Strategy games respond to the challenge of providing activities within any student's reach. They also offer an opportunity to build a learning path tailored to their own interests and abilities.
Furthermore, through three games (Hanoi Towers, Frogs and Toads, and Form and Value), the article examines the mathematics hidden under a deceptively simple and fun approach. We think it is interesting to give teachers and students the opportunity to go more deeply into the content and autonomously discover the pleasure of research.

Logic is invincible because in order to combat logic it is necessary to use logic.
P. Boutroux

A les exposicions i tallers del MMACA i en els cursets de formació que faig, sol o amb la Pura Fornals, treballo els jocs d'estratègia com una eina per a desenvolupar el pensament matemàtic del professorat i de l'alumnat.

El plaer lúdic i la connexió amb la lògica bàsica han fet que cap docent, de secundària o de primària, es queixés pel temps que els dedicava, però sempre em quedava una mica de mala consciència per haver sortit del currículum i de les exigències de formació més explícites.

En quin lloc del currículum es poden col·locar els jocs d'estratègia? L'habilitat de càlcul necessària és molt reduïda, encara que lligada al càlcul mental, que voldríem més practicat a l'aula. D'altra banda, el coneixement necessari per a dissenyar estratègies guanyadores i el llenguatge per a expressar-les són força complexos de formular.

Acabem lligant aquest àmbit a la resolució de problemes, per raons de mètode d'apropament o procedimentals.

Molts pedagogs ressalten el valor didàctic del joc; de Piaget a Vygotsky, de Bateson a Bruner: només cal escollir. Però ens interessa més analitzar en aquest context els documents del Departament d'Educació (2013).

En les quatre dimensions que focalitza: Resolució de problemes, Raonament i prova, Connexions i Comunicació, i Representació, trobem competències bàsiques que es poden estimular a través dels jocs d'estratègia.

Una altra coincidència que trobo amb els documents esmentats és la de proposar activitats que involucren tot l'alumnat i provoquen aprenentatge segons les capacitats de cadascú.

En aquesta òptica, la facilitat per apropar-se a les activitats lúdiques i la simplicitat de les regles fan que tothom pugui enfrontar-s'hi.

A un segon nivell podríem col·locar la capacitat d'observar les situacions clau que es repeteixen en un joc, esbossos d'estratègies: els moviments guanyadors i els passos en fals o els cercles viciosos... o algunes reincidències entre jocs diferents, aparentment llunyans, isomorfismes que es fan evidents quan assumim el que el citat document del Departament d'Ensenyament (2013) indica com a gradació més alta d'adquisició de competències i intentem trobar les estratègies guanyadores, expressades en un llenguatge mínimament rigorós, per aplicar-les en altres contextos.

Transversalment a aquests nivells d'adquisició de competències específiques, estarem treballant coses tan importants com ara la motivació, la classificació, el canvi del punt de vista, l'assumpció i el respecte de regles i relacions, la col·laboració, la comunicació, la investigació...

Abans de passar a mostrar en l'òptica competencial uns exemples de jocs d'estratègia, tots prou coneguts, m'agradaria reivindicar la intel·ligència dels companys i companyes que, des de l'ensenyament, fa anys que es dediquen a educar jugant, convençuts de la connexió potent que existeix entre joc i aprenentatge.

El premi Gonzalo Sánchez Vázquez als valors humans de l'ensenyament, que la FSPM ha concedit al mestre Coque Pazos durant les JAEM de Mallorca, n'és el millor homenatge.

1. **Les Torres de Brahma o Torres d'Hanoi** (fig. 1)

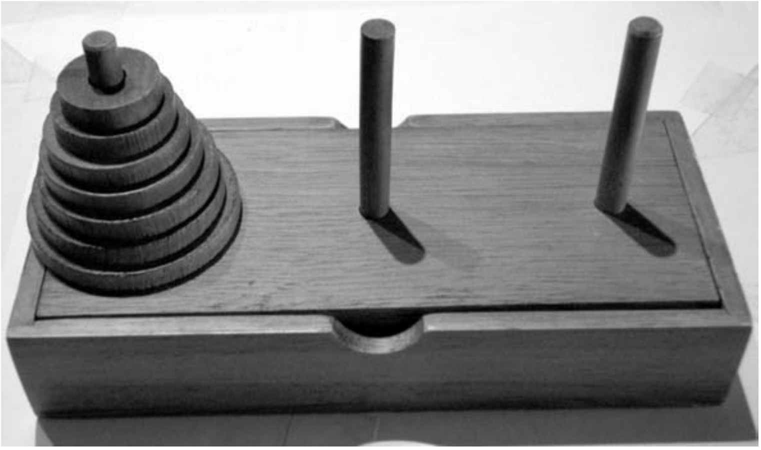


Figura 1. Les Torres de Brahma o Torres d'Hanoi.

És un joc força conegut i amb bones potencialitats didàctiques, com ho demostra un magnífic article de Luis Balbuena (2006).

Un cop enteses les regles, simples, tothom hi pot jugar.

Es pot jugar en línia a: http://www.xtec.cat/~jjareno/activitats/hanoi/hanoi.htm o http://hanoitower.mkolar.org/Hanoi.html

Abans d'arribar al plantejament final: Quin és el nombre mínim de moviments per traslladar una torre de *n* discos?, es descobreixen algunes coses interessants:

- **Si un repte et sembla massa complicat, planteja't una situació més simple**. En aquest cas, comença amb menys peces, per exemple 2 discos.

  El que compta són les preguntes que et vas fent:

  Quants moviments he necessitat?

  En quin pal he posat el primer disc?

- Abans de passar a resoldre el repte de la torre de 3 discos, no t'oblidis, per massa fàcil, del repte de **la torre d'un sol disc** i un sol moviment.

- I no t'oblidis d'**anotar**: per 1 disc $\Rightarrow$ 1 moviment; per 2 discos $\Rightarrow$ 3 moviments; per 3 discos $\Rightarrow$ 8 moviments; ...

- Ja amb el repte de la torre de 4 discos, una part de l'alumnat haurà vist que, per poder construir sobre el pal C la torre de 4, haurà hagut de construir sobre el pal B la torre de 3 discos i sobre el C la de 2. I això té molt a veure amb **l'estratègia guanyadora.**

- Així, amb ***n* torres**, abans de començar ja puc saber sobre quin pal hauré de moure el primer disc perquè la torre de *n* discos es construeixi sobre el pal C, i estalviar moviments.

Bona part de l'alumnat podrà arribar a comptar el nombre de moviments necessaris per a 1-5 torres (1, 3, 7, 15 i 31) i una part expressarà la seqüència dient que, afegint un disc cada vegada, anem augmentant de 2, 4, 8 i 16 moviments. Ja ha sortit la relació amb les **potències de 2** i tothom podrà valorar que la torre de 6 discos necessitarà un mínim de 63 moviments per passar del pal A al pal C. Quan algun més espavilat arribarà a expressar la regla $2n - 1$, molts ho entendran i entendran també l'avantatge d'aquesta manera d'**expressar l'estratègia**, que no demana sumar els passos anteriors.

Recuperat el magnífic conte originari del temple de Brahma i de la seva torre de 64 discos, trobarem que coincideix amb el conte de l'inventor dels escacs (en l'última casella del tauler s'hauran de posar 2^{63} grans d'arròs, però en tot el tauler n'hi haurà $2^{63} + 2^{62} + 2^{61} + 2^{60} + \cdots 2^{0}$, o sigui, $2^{64} - 1$).

Si per satisfer l'aposta amb l'inventor dels escacs caldria 200 vegades la producció mundial de cereals, per fer els més de 18 milions de milions de milions de moviments, al ritme d'un disc per minut, serien necessaris quasi 3,5 milions de milions d'anys. Com veieu, falta temps perquè s'acabi el món!

De l'article de Luis Balbuena (2006) es poden treure moltes idees:

- El nombre total de moviments possibles dibuixa un fractal anomenat Triangle de Sierpinski i els moviments guanyadors segueixen el costat dret del triangle.

  Vam aprofitar això per a crear, dins del programa Recerca en Acció (2011), una simulació que vam presentar, juntament amb al material manipulable, a l'exposició del MMACA al Centre Social d'Unnim a Sabadell (gener-novembre 2012).

  Força jocs d'estratègia i de matemàgia fan servir els **nombres binaris**. Potser el més famós és el Nim, que la gent del MMACA utilitzem per les fires en la versió *Marienbad*:

- 15 pals (repartits en 4 grups: 1, 3, 5, 7);
- Cada jugador pot treure a cada jugada el nombre de pals que vol del mateix grup;
- El jugador que pren l'últim pal perd.

En tornarem a parlar més endavant.

2. **Granotes i gripaus** (fig. 2)

Figura 2. Granotes i gripaus.

Normalment s'hi juga amb 3 o 4 granotes i el mateix nombre de gripaus, posats en les caselles d'un tauler que a més a més té una casella buida per poder moure les peces.

Les fitxes poden avançar o saltar (només una peça) per ocupar la casella buida i no es pot tornar enrere.

Molt senzill de jugar, però no tant de resoldre.

Al cap d'uns quants intents, es comencen a reconèixer situacions que representen un obstacle insuperable i que s'han d'evitar. Resoldre una vegada el repte no significa haver entès l'estratègia guanyadora i cal jugar-hi més vegades per arribar a consolidar-la.

Abans de plantejar-nos quin és el nombre mínim de moviments per n granotes i n gripaus, és interessant observar atentament la simetria en el desenvolupament del joc.

Aquí també és millor començar amb un nombre reduït de peces, registrant de manera ordenada els moviments que es fan:

1 granota (g) i 1 gripau (G):	Avança g; [Salta G]; Avança g
2 granotes (g) i 2 gripaus (G):	Ag; SG; AG; Sg; [*]; Sg; AG; SG; Ag
3 granotes (g) i 3 gripaus (G):	Ag; SG; AG; Sg; Sg; Ag; SG; [SG]; SG; Ag; Sg; Sg; AG; SG; Ag

Aquest recull de dades, que es pot fer amb un full de càlcul, dóna moltes indicacions; evidencia:

- com els moviments de les peces són simètrics (l'element central de la simetria està posat entre [*]):

  exemple (amb 2 g i 2 G): A, S, A, S S, A, S, A

- com la simetria es manté introduint la variable de granotes i gripaus:

  exemple (amb 2 g i 2 G): Ag, SG, AG, Sg Sg, AG, SG, Ag

  I aquesta doble simetria (moviments, peces) és manté augmentant el nombre de peces (i, òbviament, de moviments per intercanviar posicions de granotes i gripaus).

- És interessant, com a pas cap al descobriment de la fórmula que relaciona el nombre de moviments i el de granotes, anotar la suma de moviments d'Avançades i Salts:

  $n = 1$: $A = 2$, $S = 1$ Tot $= 3$ $\quad$ $n = 4$: $A = 8$, $S = 16$ Tot $= 24$

  $n = 2$: $A = 4$, $S = 4$ Tot $= 8$ $\quad$ $n = 5$: $A = 10$, $S = 25$ Tot $= 35$

  $n = 3$: $A = 6$, $S = 9$ Tot $= 15$ $\quad$ $\cdots$

  Si mirem els moviments totals, és possible que algú arribi a formular:

  $$m = (n + 1)^2 - 1 \Rightarrow m = n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n$$

  Si mirem els moviment d'Avançament i Salt, trobarem An $= 2n$ i Sn $= n^2$.

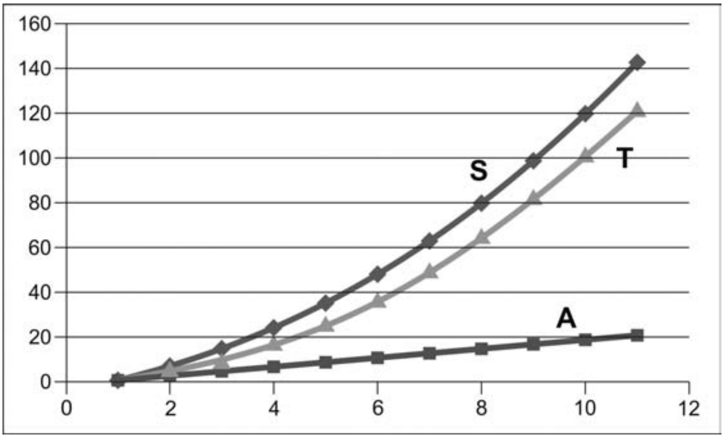


Figura 3. Variacions del nombre de salts (S), avançades (A) i moviments totals (T) en relació al nombre de peces del joc.

Una bona anàlisi del joc es troba en la fitxa de la col·lecció Juegos de Ingenio (2003).

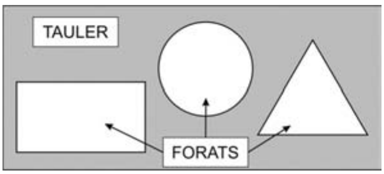
Es pot jugar en línia a: http://www.xtec.cat/~jjareno/activitats/granotes/granotes.htm

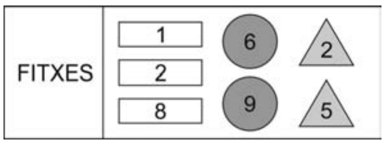
http://akidsheart.com/math/mathgames/leapfrog.htm

3. El joc de les fitxes

El vaig descobrir en l'edició d'estiu d'un diari italià, quan s'omple el buit de notícies ampliant la secció de passatemps.

El càlcul i l'estratègia que demana són prou fàcils, però la combinació dels dos pot resultar motivadora per a l'alumnat de primària, així que hem incorporat aquest repte a la nostra col·lecció de materials i construcció d'un mòdul per a les exposicions.





Figures 4 i 5. Tauler i peces del joc de les fitxes.

El repte consisteix a obtenir determinats valors en cada forat del tauler, posant-hi les fitxes necessàries i tenint en compte que una fitxa posada en un forat de la mateixa forma dobla el seu valor. Per exemple (fig. 6):

Aquest repte correspon a:	RECTANGLE:	12 ($2 \times 2 + 2 + 6$)
	CERCLE:	19 ($9 \times 2 + 1$)
	TRIANGLE:	18 ($5 \times 2 + 8$).

Hem elaborat una dotzena d'aquests reptes, que es poden proposar amb materials de diferents qualitats (dimensions, disseny, consistència, pes...) per dur a l'aula, a tallers de les es-

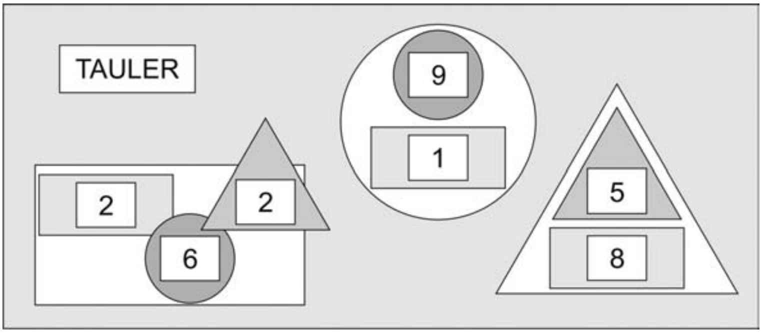


Figura 6. Exemple de solució d'un repte del joc de les fitxes.

coles o del MMACA o a exposicions i fires, amb bona acollida tant del públic escolar com del públic en general.

Marcus Du Satoy (2012) fa referència als problemes NP-complets, o sigui, aquells en què «hi ha un nombre immens de solucions possibles». És a dir, no es pot arribar a dissenyar un algoritme que ens doni totes les solucions. Du Satoy (2012) diu que, si es trobés aquest algoritme, seria el mateix per a tots els problemes d'aquest tipus. Al text, l'autor posa l'exemple dels partits de futbol i de les complicacions que va provocar passar d'una situació: PARTIT GUANYAT = = 2 punts; EMPATAT = 1 punt, a l'actual: PARTIT GUANYAT = 3 punts; EMPATAT = 1 punt. Calcular quins resultats de tots els partits de tots els equips serien favorables al nostre equip per fer-lo guanyar la lliga s'ha transformat en un problema NP-complet.

Aquesta lectura em va canviar la percepció que tenia del joc de les fitxes, ja que de cop em va semblar que, rere un enfocament simple, amagava unes matemàtiques molt més complexes.

Què sabem?

- El valor mínim que poden sumar totes les fitxes un cop col·locades és de 33 (si cap fitxa és en un forat de la mateixa forma) i el màxim, naturalment, 66 (totes les fitxes han doblat el seu valor).
- Col·locant oportunament les fitxes podem obtenir tots els valors entre 33 i 66.
- Molts valors es poden obtenir amb més d'una combinació de fitxes (el 66 evidentment no. Però: i el 33?).

Suposo que, fins aquí, podríem intentar calcular quantes possibles combinacions es donen, encara que siguin moltes (més de 2.000) i el treball prou avorrit.

Però, quan introduïm els valors que corresponen a cada forat, la cosa canvia i NO totes les combinacions possibles per obtenir la suma dels valors dels forats seran acceptables.

Tindrem solucions úniques o múltiples o impossibles.

Per exemple: hi haurà moltes maneres d'obtenir un total de 44:[1]

1. **R** = forat rectangular; **C** = forat circular i **T** = forat triangular
r = fitxes rectangulars; **c** = fitxes circulars i **t** = fitxes triangulars

$R15\ (c9 + r1 = 2 + r2 = 4)$; $C17\ (t5 + c6 = 12)$; $T12\ (r8 + t2 = 4)$

$R6\ (r1 = 2 + r2 = 4)$; $C17\ (t5 + c6 = 12)$; $T21\ (r8 + c9 + t2 = 4)$

$R11\ (t5 + r1 = 2 + r2 = 4)$; $C12\ (c6 = 12)$; $T21\ (r8 + c9 + t2 = 4)$

$R6\ (r1 = 2 + r2 = 4)$; $C25\ (r8 + t5 + c6 = 12)$; $T13\ (c9 + t2 = 4)$ etc.

Només canviant de forat els valors que no doblen es poden obtenir altres variants, com en el cas de suma $= 33$.

Però hi haurà només una solució per fer:

$$R11\ (c9 + r1 = 2); \quad C22\ (r8 + r2 + c6 = 12); \quad T14\ (t5 = 10 + t2 = 4)$$

I cap per fer: $R20$; $C10$ i $T14$.

Podríem preveure si hi ha característiques generals comunes a totes les combinacions impossibles? I quantes n'hi haurà?

Vist així, el mòdul sembla tenir tots els requisits que demana un problema NP-complet.

És evident que aquesta anàlisi està dirigida al professorat i fins i tot no a TOT el professorat, sinó a aquell(e)s company(e)s que tinguin ganes d'investigar el terreny que envolta la nostra feina de professors.

Tornant a l'alumnat, què podem esperar com a actitud i adquisició després d'un treball amb els jocs d'estratègia?

Recordeu la nostra versió Marienbad del Nim i les seves regles?

Són 15 pals (repartits en 4 grups de 1, 3, 5, 7 pals); cada jugador pot treure a cada jugada el nombre de pals que vol del MATEIX GRUP; el jugador que pren l'últim pal perd. Doncs:

> La Improbable Alícia ploriquejava davant del Gat:
>
> «He perdut un dels pals que em vas donar! Justament ara, que havia entès com podia guanyar qualsevol adversari...»
>
> «Quina sort que has tingut! —li replicava el Gat—. Ara tens un nou joc per comprovar si les teves estratègies encara són valides. I vés amb compte: no és el mateix si el pal perdut és el que tot sol formava un grup o el que anava amb els altres. Amiga meva, és ara quan comencen realment a entrar en joc les matemàtiques...»
>
> I dient això, el Gat va començar a desaparèixer. Ja s'esfumava el somriure misteriós del Gat, que un somriure no menys màgic es formava als llavis de l'Alícia, mentre dins el seu cap anava analitzant les variants d'un joc que tornava a ser un repte. I per a ella sola!»[2]

Perquè, com deia John Belushi: «When the going gets tough, the tought get going!».

Gràcies a la Pura i la Fina per revisar forma i continguts.

2. Dedicat al Toni, alumne de 6è de primària del CEIP El Polvorí, que va tenir la possibilitat d'escollir entre l'opció més fàcil —i dolça— de substituir el pal perdut del Nim que li havia regalat amb el pal d'un polo o l'elaboració de noves estratègies per al joc amb 14 pals. Opció més difícil, naturalment, i amb el gust salat de la suor.

Bibliografia

Departament d'Educació (2013): http://www20.gencat.cat/docs/Educacio/Home/Departament/Publicacions/Col_leccions/Competencies_basiques/competencies_mates_primaria.pdf; http://www20.gencat.cat/docs/Educacio/Home/Departament/Publicacions/Col_leccions/Competencies_basiques/competencies_mates_ESO.pdf

Balbuena, L. (2006). Las Torres de Hanoi y el Mandato de Brahma. *Sigma*, 28, 83-94.

Recerca en acció (2011). Matemàtiques a la vista. http://www.recercaenaccio.cat/agaur_reac/AppJava/ca/diari/20120110-missatge-1-les-.jsp.

Diversos autors. (2003). Ranas y Sapos. Dins *Juegos de Ingenio* (fitxa 34). Barcelona: Orbis-Fabbri.

Du Satoy, M. (2012). El secreto de la racha ganadora. Dins *Los mi5terios de los númer6s* (p. 192-196). Barcelona: Acantilado.